Dém.

1/ f croissante sur I.

* $u_0 \leqslant u_1 \Rightarrow f(u_0) \leqslant f(u_1)$

$\Rightarrow u_1 \leqslant u_2 \Rightarrow f(u_1) \leqslant f(u_2) \Rightarrow u_2 \leqslant u_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+1}$

Alors. $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \dots$

Donc. (u_n) est croissante

* $u_0 \geqslant u_1 \Rightarrow f(u_0) \geqslant f(u_1)$

$\Rightarrow u_1 \geqslant u_2$

$\vdots$

$\Rightarrow f(u_{n-1}) \geqslant f(u_n)$

$\Rightarrow u_n \geqslant u_{n+1}$

Alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant u_{n-1} \geqslant u_n$

Donc (u_n) est décroissante

2/ f est décroissante sur I.

Soit $g = f \circ f$, alors g est croissante.

si $x \leqslant y$, $f(x) \geqslant f(y)$

$\Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$.

donc, $g(x) \leqslant g(y)$

$g(u_n) = f \circ f(u_n) = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

Alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones.

CHAPITRE I : Ensemble, logique, application

1) Assertion

- **Définition** : Une assertion est un énoncé mathématique auquel on fait attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F).
- **Exemple** : "Rabat est la capitale du Maroc" c'est vrai (V)
  "11 est un multiple de 2" c'est faux (F)

- **Définition** : On dit que deux assertions sont logiquement équivalentes, si elles ont les mêmes valeurs de vérité.
- **Exemple** (P) : "$n \in \mathbb{N}$ est pair"
  (Q) : "$n \in \mathbb{N}$ est un multiple de 2"

2) Connecteurs :

- **Définition** : Soit P et Q deux assertions, on définit les assertions suivantes par :

- (Non P) qui est vrai lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vrai.
- (P et Q) : qui est vrai lorsque les deux assertions sont vrais, et fausse sinon (Cette assertion est appelée la conjonction de P et Q)
- (P ou Q) : qui est vrai lorsqu'au moins une assertion est vrai, et fausse sinon (Cette assertion est appelé la disjonction de P et Q).

- On a alors

P	non P
V	F
F	V

P	Q	(P et Q)	(P ou Q)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemple. (P) « f est une fonction dérivable au point x_0 »
(Q) « f est une fonction continue au point x_0 »

Alors : (non P) f n'est pas dérivable au point x_0.
(P) et (Q) : f est continue et dérivable au point x_0.

Remarque. (P et Q) est equivalente à non [(non P) ou (non Q)]
(P ou Q) est equivalente à non [(non P) et (non Q)]

Définition. Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Rightarrow Q$ (On dit : P implique Q) par (non P) ou Q

. On définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ (On dit P est équivalente à Q) par $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

. **Exemple :**

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F, V	F
F	F	F V	V

Remarque :

1) Si P est vrai et si $P \Rightarrow Q$, alors Q est vraie.

2) L'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont logiquement équivalentes.

Exemple. (P) : f réelle dérivable en x_0

(Q) : f réelle continue en x_0

- Alors : (P) ⇒ (Q)

Remarque : Soit P, Q et R des assertions. On a alors équivalence entre les deux assertions de chacune des lignes suivantes.

Assertion	Assertion équivalente
non (non P)	P
P et Q	Q et P
(P ou Q) ou R	P ou (Q ou R)
(P ou Q) et R	(P et R) ou (Q et R)

- Il en est de même si l'on échange le rôle de "et" et "ou"
- L'assertion $P \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \Rightarrow P]$ et $[P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$ sont toujours vrai. Ces assertions sont appelées « tautologies ».

13. Méthodes de démonstration

① Définition (Axiome) : Une axiome est une assertion que l'on suppose vrai a priori.

Exemple : en géométrie plane : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèle.

(Théorème) Un théorème est une assertion qu'on peut déduire d'axiomes.

Exemples : le théorème de Pythagore.

Proposition : Transitivité de l'implication : soient P, Q et R des assertions.

Si l'on a $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ alors on a $(P \Rightarrow R)$.

• Contraposé : On a $(P \Rightarrow Q)$ si et seulement si $[\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P]$

• Disjonction des cas : si l'on a $(P \text{ ou } Q)$ et $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ alors on a R.

Donc, pour démontrer le résultat R, il suffit de montrer que l'on a P ou Q et dans chacun des deux cas on peut déduire R.

• Raisonnement par l'absurde

- Si l'on a $(\text{non } P \Rightarrow Q)$ et $(\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q)$ alors on a P.

- Ainsi pour démontrer le résultat P on montre que sa négation $(\text{non } P)$ entraine une assertion ainsi que le contraire de cette assertion, ce qui est absurde.

Q3. Ensemble.

2.1 - Généralités

- Intuitivement, un ensemble est une collection famée d'éléments.

- Soit E un ensemble.

• "$a \in E$" est l'assertion a appartient à E.

• non $(a \in E)$ s'écrit $a \notin E$.

• "$E \subseteq F$" est l'assertion "E est inclus dans F" signifie que tout élément de E est un élément de F.

Deux ensembles, E et F sont égaux et on écrit : $E = F$ si et seulement si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

• Convention : On admet les deux choses suivantes :

• Il existe un ensemble, appelé ensemble vide (note $\emptyset$) qui ne contient aucun élément.

• Si E est un ensemble, il existe un ensemble, appelé ensemble de parties de E et note $P(E)$ dont les éléments sont toutes les parties incluses dans E.

ça veut dire ie : $F \in P(E) \Leftrightarrow F \subseteq E$

Exemple : $E = \{a ; b ; c\}$

$P(E) = \{\emptyset ; E ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\}\}$.

2.2 - Prédicats :

Définition : Un prédicat est un énoncé mathématique contenant des variables tel que quand on remplace chacune des variables par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Exemple :

$P(n)$: « n est un multiple de 2 » est un prédicat sur $\mathbb{N}$.

$P(4)$ « 4 est un multiple de 2 » V

$P(5)$: « 5 est un multiple de 2 » F

$n \in \mathbb{N}$: « n est un multiple de 2 » est une assertion

$P(x)$ n'est pas un prédicat sur $\mathbb{R}$ / $\mathbb{Z}$

$A(x)$ « $x^2 - 1 > 0$ » c'est un prédicat sur $\mathbb{R}$

« $x^2 + 1 > 0$ » $\mathbb{C}$ / $(\mathbb{R})$ ce n'est pas un prédicat.

2.3 - Quantification :

Soit $A(x)$ un prédicat sur un ensemble E ($x \in E$). On peut construire trois assertions

- "$\forall x \in E$, $A(x)$" qui se lit quelque soit $x \in E$, nous avons $A(x)$" cette assertion est vraie lorsque $A(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

.. le symbole "$\forall$" est appelé quantification universel.

- "$\exists x \in E$, $A(x)$" se lit : « Il existe un élément $x \in E$ tel que $A(x)$

.. le symbole "$\exists$" est appelé quantification existentiel.

- "$\exists x \in E$, unique $A(x)$" qui se lit : il existe un unique élément x de E tel que $A(x)$ »

(Cette assertion est aussi notée "$\exists ! x \in E : A(x)$")

Exemple $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$: F

$\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 1 = 0$: V

2.4 - Négation des quantificateurs :

non $(\forall x \in E, A(x))$ $\Leftrightarrow$ $\exists x \in E$ (non $A(x)$)

non $(\exists x \in E, A(x))$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$, non $A(x)$

Exemple la négation de $[\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)]$ est $[\exists x \in E : A(x)$ et non $B(x)]$

(en effet $A(x) \Rightarrow B(x)$ est équivalent à non $A(x)$ ou $B(x)$)

2. L'assertion $(\forall x \in E, A(x) \Leftrightarrow B(x))$ est logiquement équivalente à

$[\forall x \in E (A(x) \Rightarrow B(x)$ et $(B(x) \Rightarrow A(x))]$. Sa négation est donc $\exists x \in E (A(x)$ et non $(B(x))$ ou $(B(x)$ et non $A(x))$

2.5 - Opérations sur les parties :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

On définit :

- $A \cap B = \{x \in E / x \in A$ et $x \in B\}$.
- $A \cup B = \{x \in E / x \in A$ ou $x \in B\}$
- la différence de A et B par $A \setminus B = \{x \in A / x \notin B\}$.
- le complémentaire de A dans E : $E \setminus A = C_E A$.

Remarque : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats. Considérons les ensemble : $A = \{x \in E / P(x)\}$.

$B = \{x \in E / Q(x)\}$.

Alors le prédicats $(P(x)$ et $Q(x))$, $(P(x)$ ou $Q(x)$ et $(\text{non } (P(x))$ sont respectivement $A \cap B$, $A \cup B$, CA_E

Prop : $A \cap A = A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.6 - Produit cartésien :

"Couple" A partir de deux éléments a et b, on peut construire un objet appelé le couple (a,b) tel que

$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Produit cartésien : Etant donnés, deux ensembles A et B, on définit le produit cartésien de A par B et on note $A \times B$ l'ensemble. $A \times B = \{(a,b) / a \in A$ et $b \in B\}$

dans le cas où $A = B$, $A \times A$ est noté A^2 et ainsi de suite

Si $A_1 \dots A_n$ sont deux ensemble, on définit le produit cartésien de A_1 par A_2 et $\dots$ A_n l'ensemble

$A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2 \dots, a_n) / a_1 \in A_1 \dots a_n \in A_n \}$.

$\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois.}}$ est noté A^n . $n \in \mathbb{N}^*$

Cours - Analyse -

- Applications

Soit E et F deux ensembles.

Définition

1. On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$.
2. Une application (ou fonction) est un triplet $u = (E, F, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F tel que : $\forall x \in E, \exists! y \in F$ unique, $(x, y) \in \Gamma$.

E est appelé l'ensemble de départ ou de définition de u.

F est appelé l'ensemble d'arrivé.

$(x, y) \in \Gamma$ s'appelle image de u par x et se note $y = u(x)$.

pour $y \in F$, tout $x \in E$ tel que $y = u(x)$, est appelé antécédent de y

Dans le graphe Γ est égale à $\{(x, u(x)) / x \in E\}$.

L'ensemble : $\{y \in F / \exists x \in E, y = u(x)\}$ s'appelle l'image de u.

Notation : L'application $u = (E; F; \Gamma)$ est notée $u : E \to F$ ou

$u : E \to F$
$x \mapsto u(x)$.

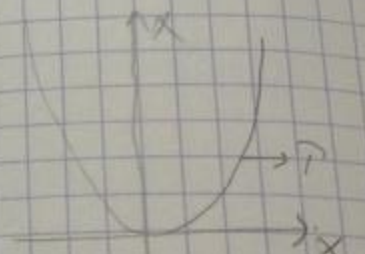
Exemple :

1- $\Gamma = \{(t; t^2) / t \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}; \mathbb{R}; \Gamma)$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

qui est noté $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$t \to u(t) = t^2$.

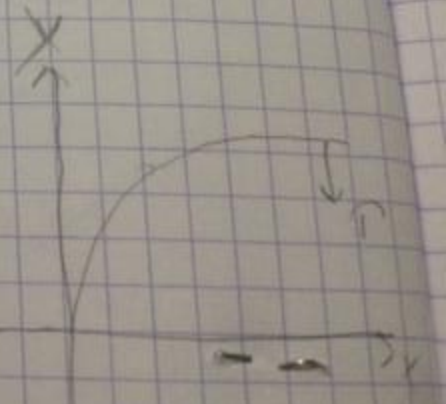


2- Soit $\Gamma = \{t^2; t) / t \in \mathbb{R}+\}$

alors $(\mathbb{R}+, \mathbb{R}+; \Gamma)$ est une application

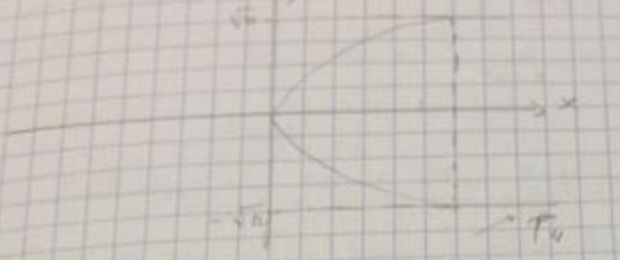
$u : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}+$

$t \to \sqrt{t}$.



3- $T_a = \{(t, t) / t \in \mathbb{R}\}$

Donc $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, T_2)$ n'est pas une application car pour $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$ $(x, y_1) \in T_2$ $(x, y_2) \in T_2$



5- $f : E \to E$ est appelé l'identité
$x \mapsto f(x) = x$ de E et on note Ide

6- Soit $a \in F$ l'application constante constamment égale à " a " est l'application : $E \to E$, $x \mapsto a$

Egalité de deux applications :

Soit E et F deux ensembles

On dit que deux application u et v sont égales si et seulement si :

- Elles ont le même sens de départ.
- Elles ont le même sens de d'arrivé
- $u(x) = v(x)$ pour tout x dans leur sens de départ commun

Remarque :

- En général, on peut avec une expression $u(x)$ et on cherche a déterminer E son ensemble de départ est F son ensemble d'arrivée.

Exemple : 1- L'expression $u(x) = \frac{1}{x^2-1}$ définie une application : $A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

2- $v(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

On note $\mathcal{F}(E,F) = \{u : E \to F / u \text{ est une application}\}$

Définition :

Soit $u \in \mathcal{F}(E;F)$ et $A \subseteq E$.

1- La restriction de u à A, notée u/A est définie par

$\forall x \in A$, $u/A(x) = u(x)$

2- On appelle prolongement de u, tout appelé v définie sur un ensemble G, $E \subset G$ qui vérifie $\forall x \in E$, $v(x) = u(x)$.

autrement dit : $v/E = u$

Injectivité, surjectivité et bijection :

Définition :

- Soit $u \in \mathcal{F}(E;F)$.

On dit que u est une injection (ou injectivité) si elle vérifie l'une de 3 propriété équivalente suivantes :

1- Tout élément de F admet au plus un antécédent par u.

2- Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ ($x \in E$ est l'inconnu) admet au plus une solution.

3- $\forall (x_1, x_2) \in E^2$: $u(x_1) = u(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Définition :

$u \in \mathcal{F}(E,F)$

On dit que u est surjective (ou une surjection).

Si elle vérifie l'une des 3 propriétés équivalente suivante.

1 - Tout élément de F a au moins un antécédent par u

2 - Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ admet au moins une solution.

3 - $\forall y \in F, \exists x \in E, y = u(x)$.

Définition.

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$

u est surjective (ou une surjection).

Si elle est à la fois injective et surjective.

autrement dit, si u vérifie l'une des propriété équivalente suivantes:

1. Tout élément de F admet un antécédent unique.

2. Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ admet une solution unique.

3. $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = u(x)$

* Une bijection de E sur lui même est appelée une permutation
* L'ensemble de permutation de E est noté : $\mathcal{S}(E)$.

Exemple. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \longmapsto u(t) = t^2$

est surjective mais non

- $u(1) = u(-1)$ mais $1 \neq -1$.
- $v: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \longmapsto v(t) = t^2$ est bijective.
- $id_E : E \longrightarrow E$, $u \longmapsto u$ $\quad id_E \in \mathcal{S}(E)$.

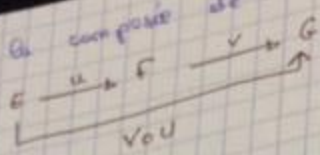
Composition d'application:

Définition:

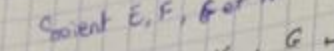
Soit E, F et G 3 ensembles $u \in \mathcal{F}(E;F)$ et $v \in \mathcal{F}(F;G)$

l'application : $E \longrightarrow G$, $x \longmapsto v(u(x))$

s'appelle la composée de v et u et est notée : vou.



Propriété :
Transitivité de la composition.
Soient E, F, G et H 4 ensembles et soit :



alors : $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$

Propriété : Soient $u \in \mathcal{F}(E;F)$ et $v \in \mathcal{F}(F;G)$.
1. Si u et v sont injectives, alors vou est injective.
2. Si u et v sont surjectives, alors vou est surjective.
3. Si u et v sont bijective vou est aussi bijective

Définition :
1. Supposons que u et v ont injection.
Soient x_1 et $x_2 \in E$. $vou(x_1) \neq vou(x_2)$.
$\Leftrightarrow v(u(x_1)) = v(u(x_2))$.
v étant injective
$\Rightarrow u(x_1) = u(x_2)$.
u étant injective
$\Rightarrow x_1 = x_2$ ▨

Application réciproque :

Déf :

Soit $u : E \to F$ une bijection, alors l'application de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent dans E s'appelle application réciproque de u et est notée par u^{-1}

donc :

$\forall (x,y) \in E \times F \quad y = u(x) \Leftrightarrow x = u^{-1}(y)$.

Exemple :

- $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
  $t \longmapsto u(t) = t^2$ est bijection.

  $u^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
  $t \longmapsto \sqrt{t}$

- $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1]$ est bijection.
  $t \longmapsto \sin(t)$
  et sa fonction réciproque est Arcsin.

Propriété :

- Si $u : E \longrightarrow F$
  alors $u \circ u^{-1} = Id_F$ et $u^{-1} \circ u = Id_E$.

Propriété :

Soient $u \in \mathcal{F}(E;F)$ et $v \in \mathcal{F}(F;E)$

Supposons que $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$

Alors u et v sont bijectives et on a :

$v = u^{-1}$ et $u = v^{-1}$.

Proposition :

Si $u : E \longrightarrow F$ est bijective.

alors $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective.

et $(u^{-1})^{-1} = u$.

Methode pour déterminer u^{-1} :

1. Déterminer une fonction v, tel que $u \circ v = id$ et $v \circ u = id$
2. On résoud l'équation $y = u(x)$, en montrant qu'elle admet pour tout $y \in F$ une solution "x" unique. C'est à dire : $x = u^{-1}(y)$.

Exemple.

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + \sqrt{1+x^2} = u(x)$

$u(x) \in \mathbb{R}_+^* \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \sqrt{1+x^2} > |x| \geq 0$

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Cherchons x : $x + \sqrt{1+x^2} = y$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{1+x^2} = y - x \text{ et } y \geq x\right]$

$\Leftrightarrow 1 + x^2 = (y-x)^2$ et $y \geq x$

$\Leftrightarrow 2xy = y^2 - 1$ et $y \geq x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y^2-1}{2y}$

(En : $\dfrac{y^2-1}{2y} = y - \dfrac{y^2+1}{2y} < y$)

Donc u est bijective et :

$u^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto u^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$.

Proposition : Soient E, F, G 3 ensembles et soient

$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ tel que u et v sont bijectives.

Alors $v \circ u$ est bijective et on a : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Démonstration : En effet.

$(v \circ u) \circ u^{-1} \circ v^{-1} = v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1}$

$= v \circ v^{-1} = id.$

Image directe et Image réciproque

Déf : Soient E et F deux ensembles. $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ et $u \in \mathcal{F}(E, F)$.

On appelle image directe de A par u l'ensemble.

$u(A) = \{ y \in F / \exists x \in A, \; y = u(x) \} = \{ u(x) / x \in A \}$.

On appelle image réciproque de B par u l'ensemble noté :
$u^{-1}(B) = \{ x \in E / u(x) \in B \}$

Remarque : • Pour définir $u^{-1}(B)$, u n'est pas nécessairement bijective.

• Si u est injective $u^{-1}(B)$ est l'image directe de B par u^{-1}.

Exemple : 1- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$

$(x, y) \in f^{-1}(\{0\}) \iff f(x; y) = 0$
$\iff x^2 + y^2 - 1$

donc $f^{-1}([0])$ est le cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon 1.

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

$f([-2, 2]) = [0, 4]$
$f([-1, 2]) = [0; 4]$.
$f^{-1}([-2; -1]) = \emptyset$.

Remarque :
Soit $u : E \longmapsto F$.
u est injective $\iff \forall y \in F$.
$u^{-1}(\{y\})$ a au plus un élément.
u est surjective $\iff \forall y \in F$
$u^{-1}(\{y\})$ a au moins un élément.
u est bijective $\iff u^{-1}(\{y\})$ a exactement un élément.

Exemple :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + y, xy)$.

1- Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2) \iff \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x;y) = (u,v)$

$\iff (x+y, xy) = (u,v)$

$\iff \begin{cases} x+y = u \\ xy = v \end{cases}$

$\iff$ l'équation $x^2 - ux + v = 0$ admet une solution

$\iff$ admet une solution

$\iff \Delta = u^2 - 4v \geq 0$

Donc $f(\mathbb{R}^2) = \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 - 4v \geq 0\}$

2- Déterminer $f^{-1}\left(\underbrace{\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 - 4v = 1\}}_{= B}\right)$

$(x,y) \in f^{-1}(B)$

$\iff f(x,y) \in B \iff (x+y)^2 - 4xy = 1$.

$\iff x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = 1$

$\iff x^2 + y^2 - 2xy = 1$

$\iff (x-y)^2 = 1$

$\iff x - y = 1$ ou $x - y = -1$

$\iff y = x - 1$ ou $y = x + 1$

$f^{-1}(B)$ est l'union des deux droites d'équation :

$y = x - 1$ et $y = x + 1$

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$. $B, B' \subseteq F$.

On a alors,

1- $B \subseteq B' \Rightarrow u^{-1}(B) \subseteq u^{-1}(B')$

2- $u^{-1}(B \cup B') = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$

3- $u^{-1}(B \cap B') = u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$.

$u^{-1}(C_B) = C\, u^{-1}(B)$

Démonstration.

(⊂) Soit $x \in u^{-1}(B \cap B')$ $\Leftrightarrow$ $u(x) \in B \cap B'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \in B \\ \text{et} \\ u(x) \in B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in u^{-1}(B) \\ \text{et} \\ x \in u^{-1}(B') \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$

Remarque : A et A' deux parties de E.

On a seulement $u(A \cap A') \subseteq u(A) \cap u(A')$.

Exemple :

$A = [0, 2\pi]$ $A' = [-\pi, \pi]$

$\sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$

$\sin([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$

$A \cap A' = [0, \pi]$

$\sin(A \cap A') = [0, 1] \neq \sin([A] \cap \sin(A')) = [-1, 1]$.

X Famille d'élément et d'ensembles.

Déf : Soient I et E deux ensembles,

On appelle famille d'éléments de E indixée par I toute application : $u : I \longrightarrow E$
$i \longmapsto u(i)$

Notation.

- $u(i)$ est noté u_i et $u(I)$ est noté $(u_i)_{i \in I}$.

Si $I = \mathbb{N}$ $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est appelée une suite d'éléments de E.

Famille de parties d'un ensemble.

Soient I et E deux ensembles, une famille de parties de E indixée par I est une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$. $(\forall i \in I, A_i \subseteq E)$

I est un ensemble quelconque.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une telle famille. On définit

$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E / x \in A_i \ \forall i \in I\}$

$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I : x \in A_i\}$

On a alors :

$\bigcap_{i\in I\cup J} A_i = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)$

$\bigcup_{i\in I\cup J} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)$

$C \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} CA_i$

$C \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} CA_i$

Fonction caractéristique

Déf. Si A est une partie d'un ensemble E, la fonction caractéristique de A est la fonction notée $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$.

$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a alors : $\forall A, B \subseteq E$

(1) : $\chi_{A\cap B} = \chi_A . \chi_B$.

(2) : $\chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B)$.

$= \chi_A + \chi_B - \chi_A . \chi_B$.

(3) : $\chi_{E\setminus A} = 1 - \chi_A$

x	χ_A	χ_B	$\chi_{A\cap B}$	$\chi_A \chi_B$	$\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$
$x \in A \setminus B$	1	0	0	0	1
$x \in B \setminus A$	0	1	0	0	1
$x \in A \cap B$	1	1	1	1	1
$x \notin A \cup B$	0	0	0	0	0

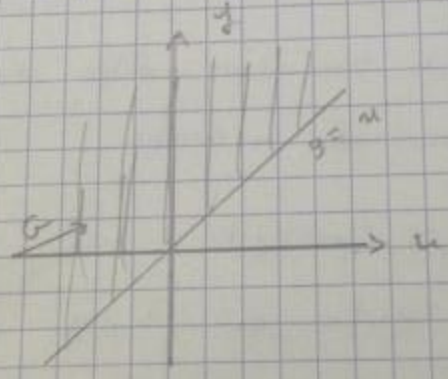
Relation binaire.

Déf: Soit G un graphe de E (c'est à dire $G \subseteq E \times F$).
(la fonction caractéristique de A est la fonction notée $\chi_A : E \to \{$

La relation définie par
$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G$. est appelée une relation binaire

Exemple:

1- La relation définie sur $\mathbb{R}$ par: $x R y \Leftrightarrow x \leq y$ a pour graphe G.



2- La relation: $x, y \in \mathbb{R}$, $x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ a pour graphe les 2 droites $y = x$ et $y = -x$.

Relation d'ordre.

Déf: Une relation binaire R sur E est dite une relation d'ordre. Sur E si et seulement si on a:

(1): $\forall x \in E$, $x R x$. (On dit que R est réflexive)